

BERGISCHE UNIVERSITÄT  
WUPPERTAL



*Fachbereich 8*  
NATURWISSENSCHAFTEN

# Der Phasenübergang in der U(1)-Gittereichtheorie

Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
des Fachbereichs Physik  
der Bergischen Universität Wuppertal

vorgelegt von

Guido Arnold  
aus Wuppertal

WUB-DIS 2003-1

Januar 2003

# Abstract

In this work the phase transition of 4d compact pure U(1) gauge theory with Wilson action is investigated. By means of a highly efficient parallel implementation of the multicanonical Hybrid Monte Carlo algorithm we simulate systems of lattice sizes up to  $18^4$  with  $\mathcal{O}(10^6 - 10^7)$  configurations respectively. The goal of the project is to produce unambiguous results as to the order of the U(1) phase transition.

In a heuristic extension of the first order finite size scaling (FSS) theory of Borgs-Kotecky to U(1) gauge theory we investigate several cumulants of the plaquette energy. We find scaling to be consistent with a series expansion in terms of the reciprocal volume of the System  $1/V$ . In particular the pseudocritical couplings  $\beta(V)$  can be described by this ansatz with high precision and stability. We extract the infinite volume transition coupling,  $\beta_T = 1.0111331(21)$ , and determine the asymmetry,  $\log(X) = 3.21(10)$  where  $X$  denotes the relative weight of the coulomb phase over the confined phase in the infinite volume limit.

Since we cannot definitely discard the possibility of an asymptotic second order scaling that might show up on large lattice sizes, we investigate the latent heat by additional simulations of both metastable branches on lattice sizes up to  $32^4$  at the very transition coupling,  $\beta_T$ . The occurrence of a nonvanishing energy gap indicates a discontinuous phase transition. Furthermore its value is consistent with the gap obtained from FSS of the specific heat within the Borgs-Kotecky scheme.

An independent leading order perturbative lattice calculation confirms a first order scaling of the pseudocritical coupling as defined by the equilibrium of the free energies in both phases. The leading correction reveals an asymmetry of  $\log(X) = 3.15(8)$  in striking agreement with the FSS result. Yet we are faced with deviations from the Borgs-Kotecky scheme in higher order corrections to asymptotic scaling and conclude that either the Borgs-Kotecky first order theory or lattice perturbation theory might exhibit only asymptotic convergence. This does however not affect the clear evidence of a discontinuous phase transition determined by the non vanishing infinite volume gap.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1	Eichtheorie der QED . . . . .	7
2.2	$U(1)$ -Gittereichtheorie . . . . .	9
2.2.1	Diskretisierung . . . . .	10
2.2.2	Die Wilson-Wirkung . . . . .	11
2.2.3	Magnetische Monopole . . . . .	14
2.3	Phasenübergänge . . . . .	15
2.3.1	Die Ordnung eines Phasenübergangs . . . . .	15
	Phasenkoexistenz . . . . .	16
	Oberflächenspannung . . . . .	16
2.3.2	Der Phasenübergang der $U(1)$ -Gittereichtheorie . . . . .	17
2.3.3	Bisherige Untersuchungen des $U(1)$ -Phasenübergangs . . . . .	18
2.3.4	Existenz des Kontinuumslimites . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Simulation</b>	<b>23</b>
3.1	Verteilungen . . . . .	23
3.1.1	Importance sampling . . . . .	23
3.1.2	Umbrella sampling . . . . .	25
3.1.3	Kanonische Verteilung . . . . .	26
3.1.4	Multikanonische Verteilung . . . . .	27
3.2	Algorithmen . . . . .	30
3.2.1	Markov Prozess . . . . .	30
3.2.2	Autokorrelation . . . . .	31
	Integrierte Autokorrelationszeit . . . . .	31
	Exponentielle Autokorrelationszeit . . . . .	33
	Flip-Autokorrelationszeit . . . . .	33
3.2.3	Slowing down . . . . .	34
3.2.4	Metropolis Algorithmus . . . . .	35
	Einstellung der Parameter . . . . .	37
	Konvergenz des Single-Site Metropolis . . . . .	37
3.2.5	Hybrid Monte Carlo (HMC) . . . . .	38
	Konvergenz des HMC . . . . .	40
3.2.6	Multikanonischer Hybrid Monte Carlo (MHMC) . . . . .	42

	Konvergenz des MHMC . . . . .	43
	Bestimmung des multikanonischen Potentials . . . . .	43
	Multihistogramm . . . . .	47
3.2.7	Relaxation . . . . .	47
3.3	Simulationsparameter . . . . .	49
3.4	Performanz . . . . .	52
	Parallelisierbarkeit des MHMC . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Finite Size Scaling</b>	<b>57</b>
4.1	Borgs-Kotecky Ansatz . . . . .	57
4.2	Messung der Kumulanten . . . . .	58
4.2.1	Genauigkeit . . . . .	63
4.3	Kritische Kopplung . . . . .	64
4.3.1	Observablen mit exponentiellen Korrekturen . . . . .	66
4.3.2	Fitansatz 2. Ordnung . . . . .	68
4.4	Latente Wärme . . . . .	68
4.4.1	Direkte Messung der latenten Wärme . . . . .	70
<b>5</b>	<b>Störungstheoretische Betrachtungen</b>	<b>77</b>
5.1	Notation . . . . .	77
5.2	Coulomb Phase . . . . .	78
5.3	Confinement Phase . . . . .	81
5.4	Phasengleichgewicht . . . . .	82
5.5	Vergleich mit der Simulation . . . . .	83
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>85</b>
<b>A</b>	<b>Datenanalyse</b>	<b>87</b>
A.1	Integrierte Autokorrelation . . . . .	87
A.2	Jackknife Fehleranalyse . . . . .	88
<b>B</b>	<b>Modensummen</b>	<b>90</b>
B.1	$\zeta$ -Funktion Regularisierung . . . . .	90
B.1.1	Definitionen . . . . .	90
B.1.2	Integraldarstellung . . . . .	91
B.1.3	$d = 1$ . . . . .	93
B.2	Gitter-Regularisierung . . . . .	93
B.2.1	Definitionen . . . . .	93
B.2.2	Integraldarstellung . . . . .	94
B.2.3	Kontinuumsimes und Korrekturen . . . . .	97
B.2.4	$d = 1$ . . . . .	97
B.2.5	$d = 2$ . . . . .	99
B.3	$\zeta$ -Funktion Regularisierung im massiven Fall . . . . .	99
B.3.1	Definitionen . . . . .	99
B.3.2	Integraldarstellungen . . . . .	99
B.3.3	$d = 1$ . . . . .	101

B.4	Gitter Regularisierung im massiven Fall . . . . .	101
B.4.1	Definitionen . . . . .	101
B.4.2	Integraldarstellung . . . . .	101
B.4.3	Kontinuumsimes . . . . .	102
B.4.4	$d = 1$ . . . . .	102
B.5	Riemannsche $\zeta$ -Funktion . . . . .	103
B.6	Kontinuumssummen . . . . .	104
B.7	Gitter Summen . . . . .	104
B.8	Gitter-Integrale . . . . .	107
B.9	Massiver Gitter-Propagator . . . . .	108
B.9.1	$0 < d < 2$ . . . . .	108
B.9.2	$d = 2$ . . . . .	108
B.9.3	$2 < d < 4$ . . . . .	109
B.9.4	$d = 4$ . . . . .	109
B.9.5	Zusammenfassung . . . . .	110